第27卷 第6期 工程数学学报 Vol. 27 No. 6
2010年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2010

**文章编号**:1005-3085(2010)06-1001-08

# 梯形模糊数上的完备度量及其在多属性决策中的应用*

兰 蓉[1], 范九伦[2]

(1- 西安电子科技大学电子工程学院，西安 710071;
2- 西安邮电学院通信与信息工程学院，西安 710121)

**摘 要**: 为充分利用梯形模糊数的信息，本文定义了梯形模糊数上一种新的距离，证明了该距离具有完备性。利用这种距离，针对梯形模糊数上的多属性决策问题，给出了一种基于理想点的决策方法。对属性权重的“归一化”处理使得这种方法具有简单易行的优点，最后以实例说明了该方法的有效性。

**关键词**: 梯形模糊数；距离；完备性；理想点；多属性决策

**分类号**: **AMS**(2000) 68T10; 03E10 **中图分类号**: O235; C934 **文献标识码**: A

## 1 引言

自从Zadeh提出模糊集理论以来，有关模糊理论应用于决策的研究受到学者们的关注[1,2]。由于客观现实的复杂性及人类思维的模糊性，决策信息往往具有不确定性，因此人们常采用三角模糊数或区间数的形式表示信息[3-5]。梯形模糊数比三角模糊数的隶属函数形状更为复杂，并且将三角模糊数和区间数作为其特例，因此梯形模糊数能够更好地反映系统的不确定性。文献[6]提出了基于Hausdorff度量的梯形模糊数的多属性群决策方法，运算过程较为复杂。文献[7]提出使用梯形模糊有序加权平均(TFOWA)算子来解决属性值为梯形模糊数形式的决策问题，但该文没有涉及属性权重也是梯形模糊数的情形。将梯形模糊数应用于决策的关键是定义梯形模糊数间的距离。本文借鉴文献[8]中模糊数之间的距离公式，给出梯形模糊数之间一种新的距离，该公式充分考虑到梯形模糊数的信息并且是完备度量。基于该距离公式，依据传统TOPSIS方法的基本思路，针对属性值和属性权重均为梯形模糊数的多属性决策问题，给出一种决策方法。该方法通过对由梯形模糊数所表示的属性权重进行归一化处理，使得决策过程计算量小，简便易行。

## 2 梯形模糊数上的距离及其完备性

本文在实数集$\mathbb{R}$上讨论梯形模糊数问题，并令$F(\mathbb{R})$表示$\mathbb{R}$上全体模糊数所构成的集合。

**收稿日期**: 2008-09-25. **作者简介**: 兰蓉(1977年12月生)，女，讲师. 研究方向：智能信息处理，模式识别.
***基金项目**: 陕西省教育厅科研计划项目(09JK720).

**定义 1** 设 $\widetilde{A} \in F(\mathbb{R})$，若 $\widetilde{A}$ 的隶属函数可表示为

$$\widetilde{A}(x) = \begin{cases} 0, & x < A^L, \\ \frac{x-A^L}{A^C-A^L}, & A^L \le x \le A^C, \\ 1, & A^C \le x \le A^M, \\ \frac{x-A^R}{A^M-A^R}, & A^M \le x \le A^R, \\ 0, & x > A^R, \end{cases}$$

则称 $\widetilde{A}$ 为梯形模糊数，记作 $\widetilde{A} = (A^L, A^C, A^M, A^R)$。当 $A^L \ge 0$ 时，称 $\widetilde{A}$ 为正梯形模糊数。我们将 $\mathbb{R}$ 上全体梯形模糊数所构成的集合记作 $TF(\mathbb{R})$，并简记为 $TF$。

本文借鉴文献 [8] 中模糊数上的积分型距离，给出梯形模糊数上一种新的距离。为此，对任意的 $\lambda \in [0,1]$，在梯形模糊数的 $\lambda$-截集 $[A^L + \lambda(A^C - A^L),\ A^R + \lambda(A^M - A^R)]$ 中添加参数 $A^C$, $A^M$ 后得到 $A_\lambda = [A_\lambda^l, A_\lambda^c, A_\lambda^m, A_\lambda^r]$，其中

$$A_\lambda^l = A^L + \lambda(A^C - A^L), \quad A_\lambda^c = A^C, \quad A_\lambda^m = A^M, \quad A_\lambda^r = A^R + \lambda(A^M - A^R).$$

**定义 2** 设对任意的 $\widetilde{A}$, $\widetilde{B} \in TF(\mathbb{R})$, $\lambda \in [0,1]$，令

$$A_\lambda = \left[A_\lambda^l, A_\lambda^c, A_\lambda^m, A_\lambda^r\right], \quad B_\lambda = \left[B_\lambda^l, B_\lambda^c, B_\lambda^m, B_\lambda^r\right]$$

为相应的 $\lambda$-截集。定义映射 $d' : TF(\mathbb{R}) \times TF(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ 如下

$$d'(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \int_0^1 d(A_\lambda, B_\lambda)\mathrm{d}\lambda, \tag{1}$$

其中

$$d(A_\lambda, B_\lambda) = \alpha_1|A_\lambda^l - B_\lambda^l| + \alpha_2|A_\lambda^c - B_\lambda^c| + \alpha_3|A_\lambda^m - B_\lambda^m| + \alpha_4|A_\lambda^r - B_\lambda^r|,$$

且 $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_3 > 0,\ \alpha_4 > 0$。通常可要求 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$。

容易证明 $d'(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ 是 $TF(\mathbb{R})$ 上的距离。因此，我们有下面的结论。

**定理 1** $(TF(\mathbb{R}), d')$ 是度量空间。

**注 1** 在 (1) 式中，若 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$，则 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$ 可被看作归一化权重。由于通常认为梯形模糊数中左，右端点具有相同的功效，同时“隶属度最大的点”的上、下界也具有同等的重要性，即 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha\,(0 < \alpha < 1)$ 且 $\alpha_3 = \alpha_4$，因此，$\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1-2\alpha}{2}$，故有

$$d'\big(\widetilde{A}, \widetilde{B}\big) = \int_0^1 \Big(\alpha|A_\lambda^l - B_\lambda^l| + \frac{1-2\alpha}{2}|A_\lambda^c - B_\lambda^c| + \frac{1-2\alpha}{2}|A_\lambda^m - B_\lambda^m| + \alpha|A_\lambda^r - B_\lambda^r|\Big)\mathrm{d}\lambda. \tag{2}$$

在本文中，我们将左，右端点及“隶属度最大的点”的上、下界同等看待，即 $\alpha = \frac{1}{4}$，则有

$$d_1'\big(\widetilde{A}, \widetilde{B}\big) = \frac{1}{4}\int_0^1 \big(|A_\lambda^l - B_\lambda^l| + |A_\lambda^c - B_\lambda^c| + |A_\lambda^m - B_\lambda^m| + |A_\lambda^r - B_\lambda^r|\big)\mathrm{d}\lambda. \tag{3}$$

在具体应用时，使用者可根据实际情况灵活地对参数进行选取，得到合适的计算公式。

**定理 2** 度量空间 $(TF(\mathbb{R}), d')$ 是完备的。

证明 要证明 $(TF(\mathbb{R}), d')$ 是完备的，只需证明 $TF(\mathbb{R})$ 中的 Cauchy 列是收敛的即可。设序列 $\{\widetilde{A}_n \,|\, n \in \mathbb{N},\ n \ge 1\} \subseteq TF(\mathbb{R})$ 为 Cauchy 序列，下面证明该序列是收敛的。

由$\{\widetilde{A}_n\,|\,n\in\mathbb{N},\,n\geq 1\}$是Cauchy列可知，对任意的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{N}$，使得$n,m>N$时，有

$$\alpha_1\int_0^1|A^l_{n\lambda}-A^l_{m\lambda}|\mathrm{d}\lambda+\alpha_2\int_0^1|A^c_{n\lambda}-A^c_{m\lambda}|\mathrm{d}\lambda$$
$$+\alpha_3\int_0^1|A^m_{n\lambda}-A^m_{m\lambda}|\mathrm{d}\lambda+\alpha_4\int_0^1|A^r_{n\lambda}-A^r_{m\lambda}|\mathrm{d}\lambda<\varepsilon,$$

从而有

$$\int_0^1|A^l_{n\lambda}-A^l_{m\lambda}|\mathrm{d}\lambda<\frac{1}{\alpha_1}\varepsilon,\quad\int_0^1|A^c_{n\lambda}-A^c_{m\lambda}|\mathrm{d}\lambda<\frac{1}{\alpha_2}\varepsilon,$$
$$\int_0^1|A^m_{n\lambda}-A^m_{m\lambda}|\mathrm{d}\lambda<\frac{1}{\alpha_3}\varepsilon,\quad\int_0^1|A^r_{n\lambda}-A^r_{m\lambda}|\mathrm{d}\lambda<\frac{1}{\alpha_4}\varepsilon.$$

由

$$\int_0^1(A^l_{n\lambda}-A^l_{m\lambda})\mathrm{d}\lambda=\frac{(A^L_n-A^L_m)+(A^C_n-A^C_m)}{2}$$

以及

$$\left|\int_0^1(A^l_{n\lambda}-A^l_{m\lambda})\mathrm{d}\lambda\right|\leq\int_0^1|A^l_{n\lambda}-A^l_{m\lambda}|\mathrm{d}\lambda$$

可知

$$\left|\frac{(A^L_n-A^L_m)+(A^C_n-A^C_m)}{2}\right|<\frac{1}{\alpha_1}\varepsilon.\tag{4}$$

由

$$\int_0^1(A^c_{n\lambda}-B^c_{m\lambda})\mathrm{d}\lambda=A^C_n-A^C_m,$$

可得

$$|A^C_n-A^C_m|<\frac{1}{\alpha_2}\varepsilon.\tag{5}$$

类似地，我们有

$$\left|\frac{(A^R_n-A^R_m)+(A^M_n-A^M_m)}{2}\right|<\frac{1}{\alpha_4}\varepsilon,\tag{6}$$

$$|A^M_n-A^M_m|<\frac{1}{\alpha_3}\varepsilon.\tag{7}$$

由$|A^L_n-A^L_m|\leq|(A^L_n-A^L_m)+(A^C_n-A^C_m)|+|A^C_n-A^C_m|$，可得

$$|A^L_n-A^L_m|<\Big(\frac{2}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\Big)\varepsilon,\tag{8}$$

同理可得

$$|A^R_n-A^R_m|<\Big(\frac{1}{\alpha_3}+\frac{2}{\alpha_4}\Big)\varepsilon.\tag{9}$$

依据实数集的完备性，由(8),(5),(7),(9)式可知

$$\big\{A^L_n\,|\,n\in\mathbb{N},\,n\geq 1\big\},\quad\big\{A^C_n\,|\,n\in\mathbb{N},\,n\geq 1\big\},\quad\big\{A^M_n\,|\,n\in\mathbb{N},\,n\geq 1\big\},\quad\big\{A^R_n\,|\,n\in\mathbb{N},\,n\geq 1\big\},$$

均为 Cauchy 列，故均为收敛数列。令

$$\lim_{n\to\infty} A_n^L = A^L, \quad \lim_{n\to\infty} A_n^C = A^C, \quad \lim_{n\to\infty} A_n^M = A^M, \quad \lim_{n\to\infty} A_n^R = A^R,$$

可得一个梯形模糊数 $\widetilde{A} = (A^L, A^C, A^M, A^R)$。

下面证明梯形模糊数序列 $\{\widetilde{A}_n \,|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ 的极限为 $\widetilde{A} = (A^L, A^C, A^M, A^R)$。

对任意的 $\varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^L = A^L$ 可知，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$，使得 $n > N_1$ 时，有 $|A_n^L - A^L| < \varepsilon$；由 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^C = A^C$ 可知，存在 $N_2 \in \mathbb{N}$，使得 $n > N_2$ 时，有 $|A_n^C - A^C| < \varepsilon$；由 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^M = A^M$ 可知，存在 $N_3 \in \mathbb{N}$，使得 $n > N_3$ 时，有 $|A_n^M - A^M| < \varepsilon$；由 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^R = A^R$ 可知，存在 $N_4 \in \mathbb{N}$，使得 $n > N_4$ 时，有 $|A_n^R - A^R| < \varepsilon$。

取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$，当 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \int_0^1 \left|A_{n\lambda}^l - A_\lambda^l\right| \mathrm{d}\lambda &= \alpha_1 \int_0^1 \left|(A_n^L - A^L) + \lambda\left[(A_n^C - A^C) - (A_n^L - A^L)\right]\right| \mathrm{d}\lambda \\
&\leq \alpha_1 \int_0^1 \left|A_n^L - A^L\right| \mathrm{d}\lambda + \alpha_1 \int_0^1 \lambda\left|(A_n^C - A^C) - (A_n^L - A^L)\right| \mathrm{d}\lambda \\
&= \alpha_1 \left|A_n^L - A^L\right| + \frac{\alpha_1}{2}\left|(A_n^C - A^C) - (A_n^L - A^L)\right| < 2\alpha_1\varepsilon.
\end{aligned}$$

同理可得

$$\alpha_4 \int_0^1 \left|A_{n\lambda}^r - A_\lambda^r\right| \mathrm{d}\lambda < 2\alpha_4\varepsilon.$$

又由

$$\alpha_2 \int_0^1 |A_{n\lambda}^c - A_\lambda^c| \mathrm{d}\lambda < \alpha_2\varepsilon, \quad \alpha_3 \int_0^1 |A_{n\lambda}^m - A_\lambda^m| \mathrm{d}\lambda < \alpha_3\varepsilon,$$

可知 $d'(\widetilde{A}_n, \widetilde{A}) < (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4)\varepsilon$。由 $\varepsilon$ 的任意性可得，$\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{A}_n = \widetilde{A}$。综上可知，度量空间 $(TF(\mathbb{R}), d')$ 是完备的。

## 3 基于梯形模糊数的 TOPSIS 多属性决策

我们针对属性值与属性权重均由梯形模糊数表示的多属性决策问题，给出基于理想点的决策方法。考虑到实际的决策环境，本文所述决策问题均由正梯形模糊数描述。

令 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 为备选方案之集，$C = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为属性之集。假设备选方案 $A_i\,(1 \leq i \leq m)$ 在各属性的特性由正梯形模糊数来描述

$$A_i = \left\{\widetilde{A}_{ij} \,|\, 1 \leq j \leq n\right\}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

其中 $\widetilde{A}_{ij} = (A_{ij}^L, A_{ij}^C, A_{ij}^M, A_{ij}^R)$。另外，设属性权重向量 $W = (\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2, \cdots, \widetilde{W}_n)$，其中 $\widetilde{W}_j = (W_j^L, W_j^C, W_j^M, W_j^R)$ 为属性 $C_j$，$1 \leq j \leq n$ 的权重。

下面利用定义 2 中的距离，给出上述问题一种基于 TOPSIS 的决策方法。具体步骤如下：

**步骤 1** 对上述多属性决策问题，由方案在各属性下的取值得到决策矩阵 $D = (\widetilde{A}_{ij})_{m\times n}$，其中 $\widetilde{A}_{ij} = (A_{ij}^L, A_{ij}^C, A_{ij}^M, A_{ij}^R)$，$1 \leq i \leq m$ 且 $1 \leq j \leq n$。

**步骤 2** 根据属性的类型 (效益型和成本型) 对决策矩阵 $D$ 进行规范化处理，得到规范化决策矩阵为 $R = (\widetilde{R}_{ij})_{m\times n}$，其中 $\widetilde{R}_{ij} = (R_{ij}^L, R_{ij}^C, R_{ij}^M, R_{ij}^R)$，$1 \leq i \leq m$，$1 \leq j \leq n$。

1) 若 $C_j$ 为效益型属性，则

$$\left(R_{ij}^L,\, R_{ij}^C,\, R_{ij}^M,\, R_{ij}^R\right) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} A_{ij}^R}\left(A_{ij}^L, A_{ij}^C, A_{ij}^M, A_{ij}^R\right), \quad 1 \le i \le m; \tag{10}$$

2) 若 $C_j$ 为成本型属性，则

$$\left(R_{ij}^L,\, R_{ij}^C,\, R_{ij}^M,\, R_{ij}^R\right) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{A_{ij}^L}}\left(\frac{1}{A_{ij}^R}, \frac{1}{A_{ij}^M}, \frac{1}{A_{ij}^C}, \frac{1}{A_{ij}^L}\right), \quad 1 \le i \le m, \tag{11}$$

经过上述规范化处理之后，$R_{ij}^L \ge 0$ 且 $R_{ij}^R \le 1$。

**步骤3** 借鉴文献[9,10]中的思想确定决策问题的正理想点为 $E^+ = \{(1,1,1,1)_j \,|\, 1 \le j \le n\}$，负理想点为 $F^- = \{(0,0,0,0)_j \,|\, 1 \le j \le n\}$。

**步骤4** 对属性权重进行“归一化”处理。具体过程分两步进行：

1) 采用文献[11]中的公式对属性权重 $\widetilde{W}_j = (W_j^L, W_j^C, W_j^M, W_j^R)$ 进行解模糊处理，即

$$w_j' = \frac{W_j^L + W_j^C + W_j^M + W_j^R}{4}, \quad 1 \le j \le n, \tag{12}$$

可得数值型属性权重向量，记作 $W' = (w_1', w_2', \cdots, w_n')$；

2) 对数值型属性权重向量进行“归一化”，即

$$w_j = \frac{w_j'}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i'}, \quad 1 \le j \le n, \tag{13}$$

从而得到归一化属性权重向量 $W^N = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$。

**步骤5** 分别计算方案与正、负理想点之间的距离。方案 $A_i\,(1 \le i \le m)$ 与正理想点 $E^+$ 之间的距离记为

$$D_i^+ = \mathrm{dis}(A_i, E^+) = \sum_{j=1}^{n} w_j d'(\widetilde{A}_{ij}, \widetilde{E}_j),$$

与负理想点 $F^-$ 之间的距离记为

$$D_i^- = \mathrm{dis}(A_i, F^-) = \sum_{j=1}^{n} w_j d'(\widetilde{A}_{ij}, \widetilde{F}_j).$$

**步骤6** 依据方案的相对贴近度

$$S_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-} = \frac{D_i^-}{Dis(E^+, F^-)} = D_i^-$$

排序，使 $D_i^-$ 最大的方案为最优方案。

**注2** 上述的决策方法是基于理想点法提出的，但在理想点的具体选择上与传统的理想点法不尽相同。对于备选方案 $A_i\,(1 \le i \le m)$，传统的理想点法确定正、负理想点分别为

$$E^{r+} = \left\{\left(\max_{1\le i\le m} R_{ij}^L,\ \max_{1\le i\le m} R_{ij}^C,\ \max_{1\le i\le m} R_{ij}^M,\ \max_{1\le i\le m} R_{ij}^R\right)_j \,\middle|\, 1 \le j \le n\right\},$$

$$F^{r-} = \left\{\left(\min_{1\le i\le m} R_{ij}^L,\ \min_{1\le i\le m} R_{ij}^C,\ \min_{1\le i\le m} R_{ij}^M,\ \min_{1\le i\le m} R_{ij}^R\right)_j \,\middle|\, 1 \le j \le n\right\}.$$

本文采用的正、负理想点分别由各属性的绝对最优值、最劣值构成。可以证明，当采用定义2中的距离公式并依据上述步骤进行决策时，两种方式所得方案的最终排序是一致的。事实上，按照传统的理想点法，方案 $A_i$ 的相对贴近度为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dis}(A_i,F^{r-})}{\mathrm{dis}(A_i,E^{r+})+\mathrm{dis}(A_i,F^{r-})} &= \frac{\mathrm{dis}(A_i,F^{r-})}{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j(d'(\widetilde{A}_{ij},E_j^{r+})+d'(\widetilde{A}_{ij},F_j^{r-}))}\\ &= \frac{\mathrm{dis}(A_i,F^{r-})}{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j d'(E_j^{r+},F_j^{r-})}=\frac{\mathrm{dis}(A_i,F^{r-})}{\mathrm{dis}(F^{r-},E^{r+})},\end{aligned}$$

而对给定的问题，$\mathrm{dis}(E^{r+},F^{r-})$ 为常值，因此可直接按照 $\mathrm{dis}(A_i,F^{r-})$ 的大小进行排序。

由于 $D_i^-=\mathrm{dis}(A_i,F^{r-})+\mathrm{dis}(F^{r-},F^-)$ 且 $\mathrm{dis}(F^{r-},F^-)$ 为常值，因此采用 $\mathrm{dis}(A_i,F^{r-})$ 和 $D_i^-$ 所得排序结果相同。可见采用本文方法进行决策可以起到简化计算的作用。

## 4 实例分析

为了说明上述方法的有效性，我们对一个由正梯形模糊数刻画的实例进行分析[7]。

现有4个备选企业(方案)：$A_1$，$A_2$，$A_3$，$A_4$。从企业技术创新能力角度对企业进行评价，首先制定了6项评估指标(属性)：创新资源投入能力($u_1$)、创新管理能力($u_2$)、创新倾向($u_3$)、研究开发能力($u_4$)、制造能力($u_5$)、营销能力($u_6$)。现由专家对各企业按上述6项指标进行评估，假设每个企业在各指标下的属性值如表1所示。假设决策者给出的属性权重均由正梯形模糊数来刻画，属性权重向量为

$$\begin{aligned}W = \big(&(0.10,0.15,0.18,0.20),(0.05,0.07,0.10,0.15),(0.20,0.21,0.27,0.30),\\ &(0.05,0.08,0.13,0.15),(0.15,0.17,0.21,0.25),(0.10,0.12,0.18,0.20)\big).\end{aligned}$$

试用本文的方法对4个备选企业进行排序。

表1: 各方案的属性值

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | (0.88, 0.90, 0.92, 0.95) | (0.85, 0.87, 0.89, 0.90) | (0.80, 0.82, 0.86, 0.90) | (0.90, 0.94, 0.98, 1.00) |
| $u_2$ | (0.84, 0.86, 0.88, 0.90) | (0.91, 0.93, 0.94, 0.95) | (0.90, 0.92, 0.94, 0.95) | (0.89, 0.90, 0.92, 0.93) |
| $u_3$ | (0.91, 0.94, 0.96, 0.97) | (0.85, 0.87, 0.89, 0.91) | (0.91, 0.92, 0.94, 0.97) | (0.90, 0.92, 0.94, 0.95) |
| $u_4$ | (0.91, 0.93, 0.95, 0.96) | (0.86, 0.88, 0.91, 0.93) | (0.93, 0.95, 0.97, 0.99) | (0.90, 0.92, 0.93, 0.95) |
| $u_5$ | (0.86, 0.88, 0.90, 0.92) | (0.87, 0.89, 0.92, 0.94) | (0.90, 0.91, 0.92, 0.93) | (0.94, 0.96, 0.97, 0.98) |
| $u_6$ | (0.91, 0.92, 0.93, 0.95) | (0.92, 0.93, 0.95, 0.96) | (0.95, 0.97, 0.98, 1.00) | (0.90, 0.93, 0.94, 0.95) |

首先，对表1所示的决策矩阵$D$进行规范化处理。由于属性均为效益型，因此可利用(10)式得到规范化决策矩阵$R$为

$$\left(\begin{array}{llllll}
(0.2347,0.2400,0.2453,0.2533) & (0.2252,0.2306,0.2359,0.2413) & (0.2395,0.2474,0.2526,0.2553) \\
(0.2267,0.2320,0.2373,0.2400) & (0.2440,0.2493,0.2520,0.2547) & (0.2237,0.2289,0.2342,0.2395) \\
(0.2133,0.2187,0.2293,0.2400) & (0.2413,0.2466,0.2520,0.2547) & (0.2395,0.2421,0.2474,0.2553) \\
(0.2400,0.2507,0.2613,0.2667) & (0.2386,0.2413,0.2466,0.2493) & (0.2386,0.2421,0.2474,0.2500)
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lll}
(0.2376,0.2428,0.2480,0.2507) & (0.2281,0.2334,0.2387,0.2440) & (0.2358,0.2383,0.2409,0.2461) \\
(0.2245,0.2298,0.2376,0.2428) & (0.2308,0.2361,0.2440,0.2493) & (0.2383,0.2409,0.2461,0.2487) \\
(0.2428,0.2480,0.2533,0.2585) & (0.2387,0.2414,0.2440,0.2467) & (0.2461,0.2513,0.2539,0.2591) \\
(0.2350,0.2402,0.2454,0.2480) & (0.2493,0.2546,0.2573,0.2599) & (0.2332,0.2409,0.2435,0.2461)
\end{array}\right).$$

其次，确定该决策问题的正、负理想点：

1) 正理想点为$E^{+}=\{(1,1,1,1),(1,1,1,1),(1,1,1,1),(1,1,1,1),(1,1,1,1),(1,1,1,1)\}$；

2) 负理想点为$F^{-}=\{(0,0,0,0),(0,0,0,0),(0,0,0,0),(0,0,0,0),(0,0,0,0),(0,0,0,0)\}$。

再次，对属性权重进行“归一化”可得

$$W^{N}=\big(0.1671,\ 0.0981,\ 0.2599,\ 0.1088,\ 0.2069,\ 0.1592\big).$$

最后，采用(3)式计算各方案与负理想点$F^{-}$距离，得到相对贴近度$S_i$，具体数据见表2。由$S_2<S_1<S_3<S_4$可知，方案$A_4$为最优方案。

表2: 各案的相对贴近度

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_i$ | 0.9177 | 0.9015 | 0.9230 | 0.9399 |

## 5 结论

在将模糊数应用于决策领域的过程中，如何定义模糊数的距离是一个关键问题。本文借鉴文献[8]中模糊数间的距离公式给出了梯形模糊数间一种新的距离，该表达式以积分的形式计算梯形模糊数的距离，充分考虑了梯形模糊数的信息。针对属性值与属性权重均为梯形模糊数的多属性决策的问题，提出了基于TOPSIS的决策方法。通过对梯形模糊数型属性权重进行“归一化”处理，得到归一化的数值型权重，使得数值型权重向量可以对方案与理想点在不同属性距离进行集结，较之使用模糊数的乘法运算得到加权规范化决策矩阵的方法，在计算上相对简单。

## 参考文献：

[1] Hwang C L, Yoon K. Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications[M]. New York: Springer-Verlag, 1981

[2] 李登峰. 模糊多目标多人决策与对策[M]. 北京：国防工业出版社，2003
Li D F. Fuzzy Multiobjective Multi-person Decision Makings and Games[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2003

[3] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京：清华大学出版社，2004
Xu Z S. Uncertain Multi-attribute Decision Approach and Application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004
[4] 许叶军，达庆利. 基于理想点的三角模糊数多指标决策法[J]. 系统工程与电子技术，2007, 29(9): 1469-1471
Xu Y J, Da Q L. Method for triangular fuzzy number multiple attribute decision making based on ideal solution[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(9): 1469-1471
[5] 朱建军，刘思峰，王翯华. 群决策中两类三端点区间数判断矩阵的集结方法[J]. 自动化学报，2007, 33(3): 297-301
Zhu J J, Liu S F, Wang H H. Aggregation approach of two kinds of three-point interval number comparison matrix in group decision making[J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(3): 297-301
[6] 徐玖平. 基于Hausdorff度量模糊多指标决策的TOPSIS方法[J]. 系统工程理论与实践，2002, 22(10): 84-93
Xu J P. Technique of order preference by similarity to ideal and anti-ideal alternative for multiple attribute group decision making problems based on Hausdorff metric[J]. System Engineering: Theory and Practice, 2002, 22(10): 84-93
[7] 许叶军，达庆利. TFOWA算子及其在决策中的应用[J]. 东南大学学报(自然科学版)，2006, 36(6): 1034-1038
Xu Y J, Da Q L. Trapezoidal fuzzy ordered weighted averaging operator and its application to decision making[J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2006, 36(6): 1034-1038
[8] 朱章遐，曹炳元. 具有模糊变量的线性规划问题[J]. 模糊系统与数学，2008, 22(1): 115-119
Zhu Z X, Cao B Y. Fuzzy linear programming problems with fuzzy variables[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2008, 22(1): 115-119
[9] Jahanshahloo G R, Hosseinzadeh, Lotfi F, *et al.* Extension of the TOPSIS method for decision-making problem with fuzzy data[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 181(2): 1544-1551
[10] Szmidt E, Kacprzyk J. A similarity measure for intuitionistic fuzzy sets and its applications in supporting medical diagnostic reasoning[C]// Proc ICAISC'2004, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2004: 388-393
[11] Chen S M. Evaluating weapon system using fuzzy arithmetic operations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 77(3): 265-276

# New Complete Metric on Trapezoidal Fuzzy Numbers and its Application to Multi-criteria Decision-making

LAN Rong[1], FAN Jiu-lun[2]

(1- School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071; 2- School of Communication and Information Engineering, Xi'an Institute of Post and Telecommunications, Xi'an 710121)

**Abstract:** In order to make full use of the information of trapezoidal fuzzy numbers, a novel distance on the set of trapezoidal fuzzy numbers is defined and the completeness of the distance is proved in this paper. By using the provided distance, a method based on TOPSIS is presented to deal with the multi-criteria decision-making problem in terms of trapezoidal fuzzy numbers. By normalizing the weights of the criteria, the decision making process is simple. Finally, a practical example is provided to illustrate the method's effectiveness.

**Keywords:** trapezoidal fuzzy number; distance; completeness; ideal point; multi-criteria decision-making

**Received:** 25 Sep 2008. **Accepted:** 26 Aug 2010.
**Foundation item:** The Scientific Research Scheme of the Education Department of Shaanxi Province, China (09JK720).